**CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

**A. Kiến thức cần nhớ**

**1. Phương trình bậc hai một ẩn**

- Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng:

, trong đó  là các số thực cho trước và  là ẩn số.

- Giải phương trình bậc hai một ẩn là đi tìm tập nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn đó.

**2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai**

Xét phương trình bậc hai  và biệt thức 

*- Trường hợp 1:* Nếu  thì phương trình vô nghiệm.

*- Trường hợp 2:* Nếu  thì phương trình có nghiệm kép



*- Trường hợp 3:* Nếu  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt



**3. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai**

Xét phương trình bậc hai  với  Gọi biệt thức 

*- Trường hợp 1:* Nếu  thì phương trình vô nghiệm.

*- Trường hợp 2:* Nếu  thì phương trình có nghiệm kép: 

*- Trường hợp 3:* Nếu  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: 

**\*) Chú ý:** Trong trường hợp hệ số  có dạng  ta nên sử dụng  để giải phương trình sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.

**B. Bài tập và các dạng toán**

**Dạng 1: Không dùng công thức nghiệm, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước**

**Cách giải:** Ta có thể sử dụng một trong các cách sau

Cách 1: Đưa phương trình đã cho về dạng tích

Cách 2: Đưa phương trình đã cho về phương trình mà vế trái là một bình phương còn vế phải là một hằng số.

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

b) Ta có: 

c) Ta có: 

d) Ta có: 

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

b) Ta có: 

c) Ta có: 

d) Ta có:  (vô lý). Vậy phương trình vô nghiệm.

**Bài 3:** Với giá trị nào của tham số m thì phương trình  có nghiệm 

**Lời giải**

Thay  vào phương trình ta có: . Vậy 

**Bài 4:** Cho phương trình  Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm 

**Lời giải**

Thay  vào phương trình ta được: 

**Bài 5:** Cho phương trình . Giải phương trình (1) biết phương trình (1) có một nghiệm 

**Lời giải**

Vì phương trình có nghiệm x = 2 nên ta có:



+) 

+) 

**Dạng 2: Giải phương trình bậc hai bằng cách sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn**

**Cách giải:** Sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai để giải.

**Bài 6:** Xác định hệ số  Tính biệt thức  (hoặc  nếu ) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a) Ta có:  và  phương trình có hai nghiệm phân biệt: 

b) Ta có: 

c) Ta có:  phương trình có nghiệm kép: 

d) Ta có:  phương trình vô nghiệm.

**Bài 7:** Xác định hệ số  Tính biệt thức  (hoặc  nếu ) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

b) Ta có: 

c) Ta có: 

d) Ta có:  phương trình vô nghiệm.

**Bài 8:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

b) Ta có: 

c) Ta có: 

d) Ta có: 

**Bài 9:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

b) Ta có: 

c) Ta tính được: 

d) Ta tính được: 

**Dạng 3: Sử dụng công thức nghiệm, xác định số nghiệm của phương trình dạng bậc hai**

**Cách giải:** Xét phương trình bậc hai: 

1. Phương trình có nghiệm kép 

2. Phương trình có hia nghiệm phân biệt 

3. Phương trình có đúng một nghiệm 

4. Phương trình vô nghiệm 

**\*) Chú ý:** Nếu  ta có thể thay thế điều kiện của  tương ứng bằng 

**Bài 11:** Cho phương trình . Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép

**Lời giải**

Ta có: 

Phương trình (1) có nghiệm kép 

**Bài 11:** Cho phương trình: 

a. Giải phương trình với 

b. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với 

c. Tìm m để phương trình (1) có 1 nghiệm lớn hơn 2

**Lời giải**

b)

+) 

+)  luôn có nghiệm 

c) Với m = 0 thì phương trình (1) có 1 nghiệm x = 1 < 2

Với  luôn có 2 nghiệm phân biệt: 

Vậy phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 2 



Vậy: 0 < m < 1.

**Bài 12:** Cho phương trình  (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

**Lời giải**

Ta có: 

a) Phương tình có hai nghiệm phân biệt 

b) Xét  Phương trình có nghiệm kép khi 

c) Ta tìm được 

d) Ta tìm được 

e) Ta tìm được 

**Bài 13:** Cho phương trình  (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

**Lời giải**

Ta có: 

a) Phương tình có hai nghiệm phân biệt 

b) Tìm được  c) Ta tìm được 

d) Ta tìm được  e) Ta tìm được 

**Dạng 4: Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai**

**Cách giải:** Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai theo tham số m là tìm tập nghiệm của phương trình tùy theo sự thay đổi của m.

\*) Xét phương trình bậc hai dạng:  với  (hoặc ).

- Nếu , ta đưa về biện luận phương trình bậc nhất

- Nếu , ta biện luận phương trình bậc hai theo .

**Bài 14:** Giải và biện luận phương trình 

**Lời giải**

+) 

+) 

- 

- 

- 

Vậy m = 2 phương trinhf có nghiệm 



 phương trình có nghiệm kép 

phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**Bài 15:** Cho phương trình .

a. Giải phương trình khi m = - 2

b. Giải và biện luận phương trình them m

**Lời giải**

a. 

b. Ta xét hai trường hợp sau:

- TH1:  - TH2: 

+)  +) 

Kết luận: - phương trình vô nghiệm

- 

**Bài 16:** Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số)

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

+)  Phương trình đã cho có nghiệm kép: 

+)  Phương trình đã cho có hai nghiệm pahan biệt: 

b) Với  Phương trình có dạng: 

Với 

+)  Phương trình vô nghiệm

+)  Phương trình có nghiệm kép: 

+)  Phương trình có hai nghiệm phân biệt: 

**Bài 17:** Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số)

a)  b) 

**Lời giải**

a) Với 

Với 

+)  Phương trình vô nghiệm

+)  Phương trình có nghiệm kép: 

+)  Phương trình có hai nghiệm phân biệt: 

b) Với 

Với 

+)  Phương trình vô nghiệm

+)  Phương trình có nghiệm kép: 

+)  Phương trình có hai nghiệm phân biệt: 

**Dạng 5: Dạng toán liên quan đến tính có nghiệm của phương trình bậc hai, nghiệm chung của phương trình bậc hai**

**Cách giải:**

1. Phương trình bậc hai  có nghiệm  (hoặc ).

2. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai  và  có nghiệm chung ta làm như sau:

*Bước 1:* Gọi  là nghiệm chung của hai phương trình. Thay  vào 2 phương trình để tìm được điều kiện của tham số.

*Bước 2:* Với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình có nghiệm chung hay không và kết luận.

3. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai  và  tương đương, ta xét hai trường hợp:

*- Trường hợp 1:* Hai phương trình cùng vô nghiệm

*- Trường hợp 2:* Hai phương trình cùng có nghiệm. Khi đó:

+) Điều kiện cần để hai phương trình tương đương là chúng có nghiệm chung. Từ đó tìm được điều kiện của tham số

+) Điều kiện đủ với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình tập nghiệm bằng nhau không và kết luận.

**Bài 18:** Cho hai phương trình: 

a. Tìm a để hai phương trình có nghiệm chung

b. Tìm a để hai phương trình tương đương

**Lời giải**

a. Giả sử  là nghiệm chung của hai phương trình  ta có hệ: 

+) Với 

+) 

Vậy với a = -2 thì hai phương trình có nghiệm chung x = 1.

b. Theo câu a hai phương trình có tập nghiệm khác nhau. Vậy để chúng tương đương khi và chỉ khi chúng cùng vô nghiệm 

**Bài 19:** Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung: 

**Lời giải**

Đáp số: 

**Bài 20:** Giả sử hai phương trình:  có nghiệm chung. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Giả sử  là nghiệm chung của hai phương trình  ta có hệ: 

+) 

+)  thay vào phương trình ban đầu ta được: 



**Bài 21:** Tìm m để hai phương trình:  có duy nhất

nghiệm chung.

**Lời giải**

Giả sử  là nghiệm chung của hai phương trình  ta có hệ: 

+)  hai phương trình ban đầu trở thành: 

Hai phương trình này có nghiệm chung x = -2. Vậy m = -1 là giá trị cần tìm.

**Bài 22:** Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình  luôn vô nghiệm.

**Lời giải**

Ta có: 

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên:  phương trình luôn vô nghiệm.

**Bài 23:** Cho phương trình  với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình trên luôn vô nghiệm

**Lời giải**

Ta có: 

Vì  Tương tự ta có:  phương trình luôn vô nghiệm.

**Bài 24:** Cho hai phương trình  và . Chứng minh nếu hai phương trình trên có nghiệm chung thì: 

**Lời giải**

Gọi  là nghiệm chung của hai phương trình. Ta có: 

- Nếu  Thay  vào phương trình ta được đpcm.

- Nếu  đpcm.

**Bài 25:** Cho hai phương trình  và  trong đó  Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

**Lời giải**

Ta có: 

Từ  đpcm.

**Bài 26:** Cho hai phương trình  và . Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Hai phương trình có nghiệm chung

b) Hai phương trình tương đương

**Lời giải**

a) Gọi  là nghiệm chung của hai phương trình. Ta biến đổi được  Tìm được  hoặc 

b) Ta xét 2 trường hợp:

***- Trường hợp 1:*** Hai phương trình cùng vô nghiệm 

***- Trường hợp2 :*** Hai phương trình cùng có nghiệm và tập nghiệm giống nhau 

Vậy  thì hai phương trình tương đương.

**Bài 27:** Cho hai phương trình  và  (a là tham số). Với giá trị nào của tham số a thì:

a) Hai phương trình có nghiệm chung

b) Hai phương trình trên tương đương

**Lời giải**

a) Ta tìm được 

b) Tìm được 

**Dạng toán: Chứng minh phương trình bậc hai có nghiệm, vô nghiệm**

**Cách giải:** Ta sử dụng tính chất quan trọng sau: Cho 

Nếu có 1 số thực m sao cho  thì (1) có hai nghiệm phân biệt

Chứng minh tính chất:

Ta có: 

**Bài 28:** Chứng minh rằng với  phương trình sau luôn có nghiệm: 

**Lời giải**

Ta có: 

Mà: 

Dấu ‘ = ’ 

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

**Bài 29:** Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì phương trình sau vô nghiệm: 

**Lời giải**

Ta có: 





**Bài 30:** Cho các sô thực a, b, c thỏa mãn: phương trình 

Luôn có nghiệm

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có: 

+) TH1: 

-  phương trình vô số nghiệm

- 

+) TH1: 

Vì: 

**Bài 31:** Cho phương trình:  vo nghiệm. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau có 1 phương trình vô nghiệm, 1 phương trình có hai nghiệm phân biệt: 

**Lời giải**

Phương trình (1) vô nghiệm 

Ta có: 

Ta đi chứng minh: 

Có: 

**Bài 32:** Cho a, b, c là các số thực có tổng khác 0. Chứng minh rằng phương tình sau luôn có nghiệm: 

**Lời giải**





**Bài 33:** Cho các số a, b, c thỏa mãn a + b + c = 6. Chứng minh rằng có ít nhất 1 trong ba phương trình sau có nghiệm: 

**Lời giải**





**Bài 33:** Cho phương trình vô nghiệm. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau có một phương trình vô nghiệm và một phương trình có hai nghiệm phân biệt: 

**Lời giải**

Vì phương trình (1) vô nghiệm nên ta có: 

Hai phương trình (2)(3) có 

Để chứng minh bài toán ta cần chứng minh trong hai số  luôn có một số âm và một số dương. Điều này gợi ý ta đi chứng minh 

 trong hai số  có một số âm và một số dương dẫn đến trong hai phương trình (2)(3) luôn có một phương trình có hai nghiệm phân biệt và một phương trình vô nghiệm.

**BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Hướng dẫn giải**

a) Ta tìm được:  b) Ta tìm được: 

c) Ta tìm được:  d) Ta tìm được: 

**Bài 2:** Cho phương trình  (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi 

b) Phương trình có nghiệm kép khi 

c) Phương trình vô nghiệm khi 

d) Không có giá trị nào của m để phương trình có đúng một nghiệm

e) Phương trình có nghiệm khi .

**Bài 3:** Biện luận theo m số nghiệm phương trình  (m là tham số).

**Hướng dẫn giải**

Ta chia ra làm các trường hợp sau:

-  - 

-  - 

- 

**Bài 4:** Cho hai phương trình  và . Xác định các giá trị của tham số m để hai phương trình:

a) Có nghiệm chung

b) Tương đương

**Hướng dẫn giải**

a) Ta tìm được  hoặc 

b) Ta tìm được .